ЛА Каспарян 26.11.12

Теорема на Руше. Реализация на ПП-во от наредени n-торки като решения на ХС

ТЕО

Ако $A \in M_{m\times n}(F)$ то множеството $U \subseteq F^n$ от решения на $Ax = O_{m\times 1}$ е ПП-во на F^n с $\dim U = n - r_k(A)$

Док-во

Проверяваме че U е ПП-во на F^n и ако $r_k(A) = r$ то системата е еквивалентна на следната система

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ x_2 + \dots + a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

за $\forall\ r+1 \le j \le n$ разглеждаме решението

$$c^{(j)} = (a_{1j}, \dots, a_{rj}, \underbrace{0, \dots, 0}_{j-r-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-j}) \Rightarrow$$

за $\forall\ 1 \le i \le r \Rightarrow x_i = -\sum_{s=r+1}^{n} a_{is}x_s$

Достатъчно е да докажем че $c^{(r+1)}, \dots, c^{(n)}$ е базис на U - За $\forall \lambda_j \in F$, $1 \le j \le n$ трябва да е

$$\sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j c^{(j)} = \left(-\sum_{j=r+1}^{n} a_{1j}\lambda_j, \dots, -\sum_{j=r+1}^{n} a_{rj}\lambda_j\right)$$ Тогава

от $\sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j c^{(j)} = (0 \dots 0)$ следва $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow$

$c^{(j)}$ са ЛНЗ. За $\forall u \in U$ разглеждаме

$u' = u - \sum_{j=r+1}^{n} u_j c^{(j)} = (u_1 \dots u_n) + (-\sum a_{1j} u_j \dots - \sum a_{nj} u_n)$

$= (u'_1 \dots u'_r, \underbrace{0 \dots 0}_{n-r}) \in U$

Понеже $u'_1 \dots u'_r$ се пресмятат по формулите (3) при $x_{r+1} = \dots = x_n = 0 \Rightarrow u'_1 = \dots = u'_r = 0$ сами $u' = 0_{1\times n}$. Следователно $u = \sum_{j=r+1}^{n} u_j c^{(j)}$ и

$U = \ell(c^{(r+1)} \dots c^{(n)})$. Това доказва че $c^{(r+1)} \dots c^{(n)}$ е базис на U и $\dim U = n - r$

Деф

Всеки базис на пространството от решения на хомогенна линейна система $Ax = 0_{m\times 1}$ се нарича „фундаментална система решения" (ФСР)

Тео

За произволно ПП $U \subseteq F^n$ $\exists$ ХСЛУ с пространство от решения U

Док-во

Ако $U = \{0_{1\times n}\}$ то U е решение на

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

Ако $\{0_{1\times n}\} \neq U \subseteq F^n$ избираме базис $a_1 \dots a_k \in M_{1\times n}(F)$ на U с $\dim U = k \in \mathbb{N}$.

Разглеждаме ХЛС (4) $\begin{pmatrix} -a_1- \\ -\vdots- \\ -a_k- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{k\times 1}$ чиято матрица

по редове от компонентите на $a_1 \dots a_k$. Системата (4) има ранг k. Избираме ФСР $b_1 \dots b_{n-k} \in M_{1\times n}(F)$ на (4). Твърдим че U съвпада с пространството от решения U_0 на ХЛС (5) $\begin{pmatrix} -b_1- \\ \dots \\ -b_{n-k}- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{(n-k)\times 1}$

Всяка матрица от коефициенти е образувана по редове от координатите на $b_1 - b_{n-k}$

Преди всичко $U \subseteq U_0$, защото за $\forall 1 \le j \le n-k$ векторът b_j е решение на (4). Това означава, че $\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{js} = 0$ за $\forall 1 \le i \le k$

Последните равенства означават, че $\forall a_i$ е решение на система (5) и $\sum_{s=1}^{n} b_{js} x_s = 0$ за $\forall 1 \le j \le n-k$. С други думи $a_1 - a_k \in U_0$. Оттук $U = \ell(a_1 - a_k) \subseteq U_0$. Но $\dim U_0 = n - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_{n-k} \end{pmatrix} = n - (n-k) = k$ и $\dim U = k$, така че $U = U_0$

Th на Руше

Система линейни уравнения $Ax = b$ за $A \in M_{m \times n}(F)$, $b \in M_{m \times 1}(F)$ е съвместима (има решение) $\Leftrightarrow \operatorname{rk}(A|b) = \operatorname{rk}(A)$

Док-во

Нека $c_1 - c_n \in M_{m \times 1}(F)$ са стълбовете на $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ c_1 & \dots & c_n \\ | & & | \end{pmatrix}$. Тогава $x = (x_1 \dots x_n)$ е решение на $Ax = b$, точно когато $b = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = (c_1 - c_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 c_1 + \dots + x_n c_n = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i$. С други думи $Ax = b$ е съвместима, точно когато $b \in \ell(c_1 - c_n) \Leftrightarrow \ell(c_1 - c_n, b) = \ell(c_1 - c_n) \Leftrightarrow \operatorname{rk}(A|b) = \operatorname{rk}(c_1 - c_n | b) = \dim \ell(c_1 - c_n, b) = \dim \ell(c_1 - c_n) = \operatorname{rk}(c_1 - c_n) = \operatorname{rk}(A)$, защото ПП $\ell(c_1 - c_n)$ съвпадат с пространството $\ell(c_1 - c_n, b)$ точно когато $\dim \ell(c_1 - c_n) = \dim \ell(c_1 - c_n, b)$

Т6
Нека $z = (z_1 - z_n)$ е едно решение на системата линейни уравнения $Ax = b$. U е пространството от решения на ХЛС $Ax = 0_{m \times 1}$ със същата матрица от коефициенти A. В такъв случай $S \in F^n$ е решение на $Ax = b \Leftrightarrow S = z + u$ за някое $u \in U$

Док-во
Ако $S = z + u$ за $u \in U$ то $AS^t = A(z+u)^t = Az^t + Au^t = b + 0_{m \times 1} = b$ така че S е решение на $Ax = b$

обратно
Ако $AS^t = b$ то $A(S-z)^t = AS^t - Az^t = b - b = 0_{m \times 1}$ и $S - z \in U$

Следствия
(1) Системата линейни уравнения $Ax = b$ е определена $\Leftrightarrow$ $rk(A) = rk(A|b) = n$ където n е броят на неизвестните
(2) Системата линейни уравнения $Ax = b$ е неопределена $\Leftrightarrow$ $rk(A) = rk(A|b) < n$ където n е броят на променливите

Док-во
Прилагаме Т4 на Ръше и предишното твърдение, за да забележим че съвместната система линейни уравнения $Ax = b$ е определена $\Leftrightarrow$ съответната хомогенна система $Ax = 0_{m \times 1}$ има единствено нулевото решение. Сега $U = \{0_{m \times 1}\}$ точно когато $0 = \dim U = n - rk(A)$, което е равносилно на $rk(A) = n$